TRASFORMAZIONI GEOM. DEL PIANO

(MATRICI 2×2)

AFFINITÀ CHE LASCIANO FISSA O
(ISOMORFISMI)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad |A| \neq 0$$

	Trasformaz.	Sist. lineare	Matrice
	Generica	$A_O : \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
	Identità	$I : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Omotetia di centro O	$o_k : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
	Doppio stiramento	$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$
	"Stiramento equivalente"	$A_{\cong} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = y/k \end{cases}$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto	$y = x$	$\sigma_1 : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	$y = -x$	$\sigma_2 : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	asse x	$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	asse y	$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	O	$\sigma_O \equiv o_{-1} : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	$y = \underbrace{\mathrm{tg}\alpha}_{m}\, x$	$\sigma_\alpha : \begin{cases} x' = x\cos 2\alpha + y \sin 2\alpha \\ y' = x \sin 2\alpha - y\cos 2\alpha \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$
Rotazione	$+90°$	$\rho_{+90} : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	$-90°$	$\rho_{-90} : \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
	α	$\rho_\alpha : \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
Aff. omologica spec. di rapp. k	asse x	$\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	asse y	$\begin{cases} x' = x \\ y' = kx + y \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$
Similitudine (*)	diretta	$\begin{cases} x' = kx\cos\alpha - ky\sin\alpha \\ y' = kx\sin\alpha + ky\cos\alpha \end{cases}$	$k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
	invert.	$\begin{cases} x' = kx\cos\alpha + ky\sin\alpha \\ y' = kx\sin\alpha - ky\cos\alpha \end{cases}$	$k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

(*) Riconoscibile dal tipo di matrice: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

COMPOSIZIONE

Se $P \overset{S}{\mapsto} P' \overset{T}{\mapsto} P''$, allora $P \overset{T \circ S}{\mapsto} P''$ con $\boxed{A_{T \circ S} = A_T \cdot A_S}$

MODIFICA DEL RETICOLATO

Basta considerare i trasformati dei versori degli assi

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{i}' = A \cdot \mathbf{i} \\ \mathbf{j}' = A \cdot \mathbf{j} \end{array}\right\} = \text{le due colonne di } A.$$

per passare dai "quadretti" ai "parallelogr." di area $|A|$:

$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ ma $|\mathbf{i}'| = ?, |\mathbf{j}'| = ?$

$\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ ma $\widehat{\mathbf{i}'\mathbf{j}'}$ convesso $= ?$

AREA CON SEGNO

$\oplus$ = $\widehat{\mathbf{i}'\mathbf{j}'}$ ha verso antiorario (= percorrenza dei vertici)

$|A| > 0 \Rightarrow$ trasf. diretta (conserva l'*orientamento* dei pti)

$|A| < 0 \Rightarrow$ trasf. invertente (lo inverte)

PARTICOLARI AFFINITÀ CON O FISSA

• ***Isometria***

quadretto 1 $\mapsto$ quadretto 1

diretta $\Rightarrow |A| = 1$ = rotazione $\mathbf{i}' \perp \mathbf{j}'$ e $\widehat{\mathbf{i}'\mathbf{j}'} = \widehat{\mathbf{ij}}$

invertente $\Rightarrow |A| = -1$ = simmetria $\mathbf{i}' \perp \mathbf{j}'$ e $\widehat{\mathbf{i}'\mathbf{j}'} = -\widehat{\mathbf{ij}}$

Isometria ⇔ $A^T = A^{-1}$

• ***Omotetia***

quadretto 1 $\mapsto$ quadretto k^2

diretta $\Rightarrow |A| = k^2$

invert. $\Rightarrow \nexists$

• ***Similitudine*** *di rapp.* $|k|$

quadretto 1 $\mapsto$ parallel. $|k^2|$

diretta $\Rightarrow \rho \circ o_k : |A| = k^2$

invert. $\Rightarrow \sigma \circ o_k : |A| = -k^2$

• ***Aff. equivalente***

quadretto 1 $\mapsto$ parallelogramma 1

$|A| = \pm 1$ [$\not\Rightarrow$ isometria!!] = ha invarianti le aree

• *"Stiramento equivalente"*

quadretto 1 $\mapsto$ rettangolo 1

$|A| = \pm 1$

• *Aff. omologica*

quadretto 1 $\mapsto$ parall. 1

$|A| = 1$ $(b = h = 1)$

CASI DEGENERI

$|A| = 0$ in uno dei seguenti casi:

riga = $(0\ 0)$	colonna = $(0\ 0)^T$	rig./col. proporz.
$\mathbf{i}' // \mathbf{j}'$	$\mathbf{i}' \equiv \mathbf{0}$ opp. $\mathbf{j}' \equiv \mathbf{0}$	$\mathbf{i}' // \mathbf{j}'$

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE INVERSE

$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$|A \cdot A^{-1}| = 1$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

Es. $\rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha}$, $\sigma_\alpha^{-1} = \sigma_{-\alpha}$

A rappresenta una trasf. geom. ⇔ è invertibile ⇔ $|A| \neq 0$:

Affinità ⇔ trasformazioni lineari invertibili

- lineare = trasforma rette in rette
- invertibile = biunivoca = trasforma rette // in rette //

TRASFORMAZIONE DI UNA CURVA γ

eq. trasformaz.	$A \Leftrightarrow t : \{x' = \ldots \quad y' = \ldots$
eq. trasformaz. inv.	$A^{-1} \Leftrightarrow t^{-1} : \{x = \ldots \quad y = \ldots$
sostit. x e y nell'eq. di γ	$t : \gamma \mapsto \gamma'$

RAPPORTI DI STIRAMENTO E DIREZIONI INVARIANTI

(Autovalori e autovettori)

Dir. invarianti $\Leftrightarrow$ vettori // a sé stessi $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}'=k\cdot\mathbf{v}$ $\Leftrightarrow$

$$(*)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ soluz. non nulle $\Leftrightarrow$ la trasformaz. non è biunivoca $\Leftrightarrow$ è verificata l'**eq. caratteristica** in k

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k\end{vmatrix}=0}$$

se essa ha 2 sol. distinte, le sostituiamo a turno nel sistema

$$(*)\ \boxed{\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=kx \\ a_{21}x+a_{22}y=ky\end{cases}}$$

$y=mx$	$\Rightarrow m$ è direz. inv.	**sist. indeterm.**
$x=0$	$\Rightarrow \infty$ è direz. inv.	
identità	$\Rightarrow$ tutte direz. inv.	
sist. imp.	$\Rightarrow$ nessuna direz. inv.	**sist. imposs.**

Se $k=1$ le rette sono **unite** (restano invariate).

ESEMPI

$\rho_\alpha,\ \alpha\neq\pi$	nessuna direz. inv.
o_k	tutte le direz. inv. (con rapp. di stir. k)
σ assiale	asse di simm. e sua $\perp$ unite
similitudine	diretta = come ρ_α, invertente = come σ

Affinità = composiz. di 2 stiram. di rapp. k lungo le dir. inv.:

- soluz. eq. caratt. = autovalori = rapporti di stiram.
- soluz. sistema (*) = autovettori = direzioni invarianti

AFFINITÀ GENERICHE

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\quad |A|\neq 0$$

Consideriamole come $\tau\circ A_O$ $(\neq A_O\circ\tau)$: prima A_O poi τ.

Trasform.		Sist. lineare	Matr.+Vett.
Generica	$\tau\circ A_O$	$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2\end{cases}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$
	$A_O\circ\tau$	$\begin{cases}x'=a_{11}(x+b_1)+a_{12}(y+b_2)\\ y'=a_{21}(x+b_1)+a_{22}(y+b_2)\end{cases}$	$\begin{pmatrix}a_{11}b_1+a_{12}b_2\\ a_{21}b_1+a_{22}b_2\end{pmatrix}$
Traslazione		$\tau:\begin{cases}x'=x+b_1\\ y'=y+b_2\end{cases}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$
Omot. di c. $P(x_0,y_0)$		$o_{k,P}:\begin{cases}x'=kx+x_0(1-k)\\ y'=ky+y_0(1-k)\end{cases}$	$\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0(1-k)\\ y_0(1-k)\end{pmatrix}$
Simmetria rispetto	$x=h$	$\sigma_h:\begin{cases}x'=2h-x\\ y'=y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2h\\0\end{pmatrix}$
	$y=k$	$\sigma_k:\begin{cases}x'=x\\ y'=2k-y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2k\end{pmatrix}$
	$P(x_0,y_0)$	$\sigma_P:\begin{cases}x'=2x_0-x\\ y'=2y_0-y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x_0\\2y_0\end{pmatrix}$

TRASFORMAZIONE DI UNA CURVA γ

eq. trasform.	sist. da invertire	eq. trasf. inv.
$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2\end{cases}$	$\begin{cases}x'-b_1=a_{11}x+a_{12}y\\ y'-b_2=a_{21}x+a_{22}y\end{cases}$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x'-b_1\\y'-b_2\end{pmatrix}$

Infine sostituiamo x e y nell'equaz. di γ: $t:\gamma\mapsto\gamma'$

Pto fisso C: operiamo, per determinarne le equazioni:

traslaz. $C\mapsto O$	affin. con O fissa	traslaz. $O\mapsto C$

PROPRIETÀ INVARIANTI

Affinità univoc. determ. da 3 pti non allineati: $(0,0)\,(1,0)\,(0,1)$ e dai loro corrisp.	- allineam. pti - parallelismo $\Rightarrow$	- essere parallelogramma - essere punto medio - rapporto semplice (3 pti allin) - rapporto segmenti // (con $\pm$)
Affinità = aff. omologica $\circ$ similitudine (o viceversa)		
Aff. equival.		- aree
Isometrie, Omotetie, Similitudini		- allineamento punti - parallelismo - ampiezze angoli - rapporti fra segmenti

TRASFORMAZIONE DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Data la funzione $y=f(x)$, la sua trasformata tramite un'affinità si ottiene considerando le formule della trasformazione inversa e sostituendo x e y.

TRASLAZIONE

VETTORE	AFFINITÀ	INVERSA	F. TRASFORMATA
$\vec{v}(a,0)$	$\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'-a\\ y=y'\end{cases}$	$y=f(x-a)$
$\vec{v}(0,b)$	$\begin{cases}x'=x\\ y'=y+b\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'\\ y=y'-b\end{cases}$	$y=f(x)+b$
$\vec{v}(a,b)$	$\begin{cases}x'=x+a\\ y'=y+b\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'-a\\ y=y'-b\end{cases}$	$y=f(x-a)+b$

"STIRAMENTO" SU UN ASSE

RISULTATO	AFFINITÀ	INVERSA	F. TRASFORMATA
Allunga x (ascissa $\times k$)	$\begin{cases}x'=kx\\ y'=y\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'/k\\ y=y'\end{cases}$	$y=f(x/k)$
Allunga y (ordinata $\times h$)	$\begin{cases}x'=x\\ y'=hy\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'\\ y=y'/h\end{cases}$	$y=h\,f(x)$
Accorcia x (ascissa $/k$)	$\begin{cases}x'=x/k\\ y'=y\end{cases}$	$\begin{cases}x=kx'\\ y=y'\end{cases}$	$y=f(kx)$
Accorcia y (ordinata $/h$)	$\begin{cases}x'=x\\ y'=y/h\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'\\ y=hy'\end{cases}$	$y=f(x)/h$
Diverso rapporto	$\begin{cases}x'=kx\\ y'=hy\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'/k\\ y=y'/h\end{cases}$	$y=h\,f(x/k)$
Stesso rapporto (omotetia)	$\begin{cases}x'=kx\\ y'=ky\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'/k\\ y=y'/k\end{cases}$	$y=k\,f(x/k)$

SIMMETRIA

RISPETTO	AFFINITÀ	INVERSA	F. TRASFORMATA
Asse y	$\begin{cases}x'=-x\\ y'=y\end{cases}$	$\begin{cases}x=-x'\\ y=y'\end{cases}$	$y=f(-x)$
Asse x	$\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$	$\begin{cases}x=x'\\ y=-y'\end{cases}$	$y=-f(x)$
Origine (entrambi gli assi)	$\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$	$\begin{cases}x=-x'\\ y=-y'\end{cases}$	$y=-f(-x)$

Funzione esponenziale

Consideriamo ad es. la funzione $y = \exp_2 x = 2^x$.

AFFINITÀ	F. TRASFORMATA
Traslazione di $\vec{v}(a,0)$	$y = 2^{x-a} = \frac{1}{2^a} 2^x$
Traslazione di $\vec{v}(0,b)$	$y = 2^x + b$
Simmetria risp. l'asse x	$y = -2^x$
Simmetria risp. l'asse y	$y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
"Stiramento" sull'asse x	$y = 2^{\frac{x}{k}} = \left(\sqrt[k]{2}\right)^x$
"Stiramento" sull'asse y	$y = k2^x$

Funzioni goniometriche

Consideriamo ad es. la funzione $y = \sin x$. I risultati che seguono sono utili per studiare fenomeni periodici come moto armonico, onde…

AFFINITÀ	F. TRASFORMATA	PERIODO	INT. VARIAZ.
---	$y = \sin x$	2π	$[-1,1]$
Traslazione di $\vec{v}(-a,0)$	$y = \sin(x+a)$	2π	$[-1,1]$
Traslazione di $\vec{v}(a,b)$	$y = \sin(x-a)+b$	2π	$[-1+b, 1+b]$
"Stiramento"	$y = \sin kx$	$2\pi/k$	$[-1,1]$
	$y = A\sin x$	2π	$[-A, A]$
	$y = A\sin kx$	$2\pi/k$	$[-A, A]$
Composta	$y = \sin k(x+a)$ *accorcia x, trasla di (-a,0)*	$2\pi/k$	$[-1,1]$
	$y = A\sin k(x-a)+b$ *accorcia x, allunga y, trasla di (a,b)*	$2\pi/k$	$[-A, A]$