Suoni prodotti in serie//

La sintesi di J.B. “Fab” Fourier

Nicola Chiriano
Docente al Liceo scientifico “L. Siciliani” di Catanzaro

[NICOLA CHIRIANO]
Nicola Chiriano è docente di Matematica e Fisica al Liceo scientifico “Siciliani” di Catanzaro. Si occupa di didattica e ICT. È formatore in diversi corsi per docenti e studenti di vari ordini di scuola. Ha all’attivo varie collaborazioni con Ansas (e-tutor nei corsi Pon Tec) e Invalsi (piano di formazione Ocse-Pisa). È appassionato di matematica della musica e di musica della matematica.

[PREMESSA]

È impossibile immaginare cosa sarebbe oggi la musica moderna senza l’apporto del complesso britannico dei “*Fab Four*” (The Beatles). Eppure la stessa musica oggi neppure esisterebbe se un matematico francese, rientrato nel 1802 nella fredda Grenoble dalla campagna d’Egitto con Napoleone, studiando il modo migliore per riscaldarsi, non avesse usato ben altri **complessi**, gli elementi dell’insieme $\mathbb{C}$, ossia i numeri della forma

$$z = a + ib, \quad \text{con } a,b \in \mathbb{R} \quad \text{e } i^2 := -1 \ .$$

Parliamo di **Jean Baptiste Joseph Fourier**, allievo tra gli altri di J.L. Lagrange e P.S. Laplace, preconizzatore dei moderni sintetizzatori digitali e, in buona sostanza, di tutta la musica elettronica. L’idea di partenza del nostro “Fab” Fourier fu quella di estendere l’idea di uno sviluppo in serie trigonometrica, dovuta a D. Bernoulli e descritta nella puntata precedente, dalla funzione d’onda a tutte le funzioni periodiche, in modo da rappresentarle come sovrapposizione di armoniche successive. Questa idea fu in seguito ripresa, sviluppata e meglio formalizzata da matematici del calibro di P.G. Dirichlet e B. Riemann. Ma “Fab” Fourier fu il primo a riuscire nell’impresa di fare sintesi (armonica) dentro l’analisi (reale). Fu come uno Champollion o un Turing dei fenomeni periodici più complicati che riuscì a “decifrare” scomponendoli in un alfabeto di sinusoidi “semplici”.
Cercheremo di descrivere l’eleganza del teorema di Fourier e la sua immensa portata come omaggio allo scienziato che, per pura *serendipità*, mentre cercava la soluzione dell’equazione della propagazione del calore, ritrovò in forma definitiva quella dell’equazione delle onde sonore.

Sopra: Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830).

[L'ORBO CHE VEDEVA (MOLTO) LONTANO]

Tanto per cambiare, il primo attore che facciamo entrare in scena è **Eulero** che, nella sua fondamentale *Introductio in analysin infinitorum* (1748), arrivò a definire le funzioni trigonometriche attraverso serie (somme infinite) di Taylor. Grazie ai suoi studi, scoprì una meravigliosa relazione tra le funzioni seno, coseno ed esponenziale in base e, nota come "la" formula di Eulero per antonomasia:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ .$$

Ponendo $x = \pi$, otteniamo l'identità

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che è considerata unanimemente la formula più bella ed elegante di tutta la Matematica poiché lega assieme i cinque numeri più importanti, in una relazione che lascia tuttora increduli.

Dal 1727 Eulero lavorò (e abitò) con Daniel Bernoulli per diversi anni a San Pietroburgo, prima di trasferirsi nel 1471 a Berlino, dove arrivò a perdere quasi completamente la vista. Non stupisce quindi se una delle prime applicazioni pratiche della sua formula fu una forma più compatta della soluzione dell'equazione delle onde, con buona pace di d'Alembert e di D. Bernoulli stesso:

$$f_{\pm}(x, t) = Ae^{i(kx \pm \omega t)} = A\,[\cos(kx \pm \omega t) + i \sin(kx \pm \omega t)] \ .$$

L'unità immaginaria i comparve quando Eulero risolse l'equazione differenziale che regola il moto di un *oscillatore armonico* (una massa attaccata ad una molla) data dalla legge di Hooke: $ma = -kx$.

In forma semplificata possiamo scrivere:

$$y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow = \lambda \pm i$$

da cui la soluzione:

$$y(x) = Ae^{ix} + Be^{-ix} \ .$$

Usando un altro metodo di risoluzione (detto dei *moltiplicatori*), Eulero scoprì che vale anche l'uguaglianza:

$$y(x) = \alpha \sin(x + \beta) \ .$$

Insospettito allora dalla doppia forma della soluzione, studiò lo sviluppo in serie di e^{ix}, fino a trovare l'equivalenza sancita dalla sua formula.

Dalla formula di Eulero si ricavano anche le definizioni complesse di seno e coseno:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \ , \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ .$$

[ONDE PERIODICHE DI CALORE]

Il lavoro di Eulero venne proseguito da **J.L. Lagrange**, che studiò il sistema meccanico composto da N oscillatori armonici accoppiati U_i.

A fianco: Oscillatori armonici accoppiati (cortesia di G. Wanner).

Estendendo il risultato per $N \longrightarrow \infty$, incredibilmente (ma è davvero così ?) ritrovò l'**equazione d'onda**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

che riscrisse nella forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2 k^2 u$$

per ricavare una soluzione del tipo di quella data a suo tempo da D. Bernoulli:

$$u\,(x, t) = A \sin kx \cdot \sin akt \ .$$

Sopra: Joseph-Louis Lagrange (1736 –1813).

Lagrange con i suoi allievi si trovò così a sviluppare, con il metodo detto delle *differenze finite*, la teoria sulla propagazione del suono. Nei *Miscellanea Taurinensia* (1758) pubblicò la soluzione completa del moto di una corda vibrante, non senza sottolineare la mancanza di generalità delle soluzioni trovate in precedenza da d'Alembert ed Eulero e ancor prima da Taylor che, già nel 1715, aveva usato lo stesso metodo per risolvere il problema della corda vibrante, da lui per primo ridotto a principi meccanici.

Seguendo l'idea di Lagrange, Fourier sviluppò un modello per cui il calore si propaga tra N particelle adiacenti del mezzo come se fossero "molle in serie":

Per $N \longrightarrow \infty$ ritrovò un'equazione identica a quella dell'onda, tranne per il fatto che la derivata al primo membro è di primo e non di secondo ordine:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; .$$

Riscrivendo l'**equazione del calore** nella forma "lagrangiana":

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - a^2 k^2 u$$

Fourier trovò la soluzione "bernoulliana":

$$u(x, t) = \sum_k b_k \sin kx \cdot e^{-a^2 k^2 t}$$

che risulta univocamente determinata dai coefficienti b_k. Avendo individuato un modo per sviluppare le funzioni reali in serie trigonometriche, dopo aver superato le critiche di mostri sacri come Laplace e Legendre prima, Cauchy e Poisson dopo, nella *Théorie analytique de la chaleur* (1822) stabilì infine che, sotto certe condizioni poco restrittive,

ogni funzione periodica si può esprimere tramite una serie trigonometrica

ossia come somma di e^{ix} e delle sue potenze $(e^{ix})^n = e^{inx}$. Poiché per la formula di Eulero si ha:

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

le potenze intere di e^{ix} altro non sono che le sue **armoniche**, in quanto di frequenza multipla n.

[TIRIAMO LE SOMME]

La **serie di Fourier** di una funzione, che supponiamo per semplicità periodica di periodo $T = 2\pi$ e con integrale finito in $[0, 2\pi]$, può essere espressa in due forme equivalenti:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}}_{\text{forma complessa}} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx}_{\text{forma reale}}$$

dove i coefficienti sono legati tra loro da formule di passaggio complesse… ma non complicate:

$$\begin{array}{lcl} a_0 = 2c_0 & & c_0 = a_0/2 \\ a_n = c_n + c_{-n} & \longleftrightarrow & c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) & & c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 \; . \end{array}$$

Il termine corrispondente a n = 1

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

è l'*armonica fondamentale* di f, così come $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ continua ad essere chiamata *armonica n-ma*.

Il calcolo dei termini della serie, al fine di ottenere l'espressione univoca della funzione come somma di sinusoidi, si dice **analisi armonica** di f. Lo stesso Fourier calcolò i coefficienti a_i e b_i attraverso opportuni integrali, grazie ad un metodo dovuto alla genialità del solito Eulero (nel 1777, a ben 70 anni, dopo decenni di calcoli), usando le cosiddette proprietà di **ortogonalità** del sistema trigonometrico principale:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = 0 \end{array}\right\rangle \quad \text{per } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \qquad \text{per } n = m \; .$$

La base "scientifica" dell'Analisi armonica, cioè le ipotesi a fondamento della teoria e quindi del modello, impensierì non poco Fourier ma fu definitivamente consolidata da **J.P. Dirichlet**. Tanto per dare l'idea, i loro lavori spaziarono dalla definizione stessa di funzione fino ai criteri di convergenza o integrabilità di una serie di funzioni.

Il termine a_0 si ottiene integrando in $[0, 2\pi]$ ambo i membri della forma reale della serie:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum \int_0^{2\pi} a_n \cos nx \, dx + \sum \int_0^{2\pi} b_n \sin nx \, dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + 0 + 0 = a_0 \pi \; .$$

Moltiplicando invece per cosmx si ha:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx + \int_0^{2\pi} \sum a_n \cos nx \cos mx \, dx + \int_0^{2\pi} b_n \sin nx \cos mx \, dx \; .$$

Applicando l'ortogonalità e procedendo in maniera analoga per b_n, si ha (per n = m):

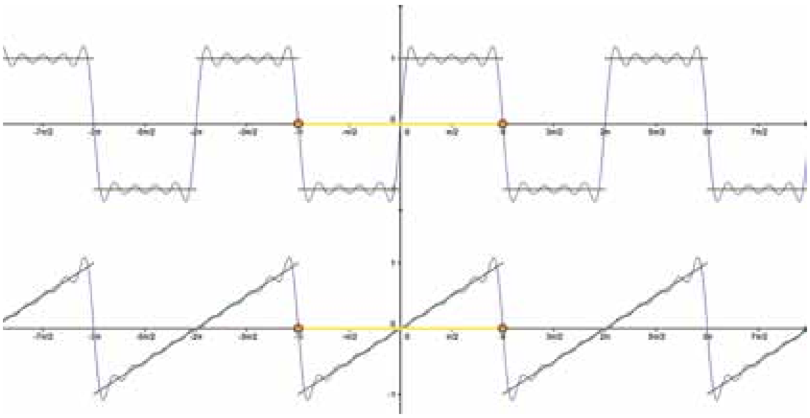
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx = 0 + \int_0^{2\pi} a_n \cos^2 nx \, dx + 0 = a_n \pi \; .$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx = 0 + 0 + \int_0^{2\pi} b_n \sin^2 nx \, dx = b_n \pi \; .$$

Con un po' di mal di testa, concludiamo che:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{array}}$$

Grazie al "*codice Fourier*" possiamo comporre, con un alfabeto di semplici "lettere" (= armoniche) tra esse sovrapposte (e non giustapposte), le "parole" che descrivono fenomeni ciclici pur complicati (= funzioni che le modellizzano): onde elettromagnetiche, maree, cicli solari… L'idea di Fourier si può adattare anche ad altre funzioni, purché esse vengano "trasformate" (sic!) in modo da risultare periodiche.



Sopra: Sviluppo in serie di Fourier (10 armoniche) di onde standard: quadra e a dente di sega.

[SUONI DI UN CERTO CARATTERE]

Con il teorema di Fourier, che traduce definitivamente qualsiasi fenomeno periodico in un modello matematico, è possibile indagare la natura del **suono**.
D. Bernoulli già sapeva che, mentre il tono fondamentale determina l'*altezza* del suono risultante, gli armonici successivi ne determinano invece l'*intensità* e il *timbro*. Nel 1863, i calcoli che Fourier usava per provare a riscaldarsi meglio servirono a **von Helmholtz** per impostare l'analisi dei caratteri distintivi del suono.

Le caratteristiche fisiche dell'onda sonora sono associate a particolari qualità percettive del suono.

Frequenza > ALTEZZA
L'altezza ci fa distinguere un suono *acuto* da uno *grave*. Il nostro orecchio può percepire frequenze comprese tra 20 Hz e 20 kHz. Frequenza *f* di riferimento è quella del La_4, fissata nel 1939 a 440 Hz.
Ponendo la velocità del suono nell'aria pari a:

$$v = 340 \text{ m/s}$$

si può facilmente calcolare la lunghezza d'onda del suono che, nel caso del La_4, è ad es. pari a:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{440 \text{ s}^{-1}} = 0.773 \text{ m} \ .$$

Ampiezza > INTENSITÀ
Distinguiamo un suono *forte* da uno *debole* in base alla pressione esercitata dall'onda sonora sul nostro timpano. Essa dipende dall'ampiezza dell'onda, oltre che dalla distanza della sorgente sonora.

Forma > TIMBRO
Grazie al timbro, infine, distinguiamo se il suono che ascoltiamo è emesso ad esempio da un violino o da un pianoforte. A parità di frequenza, esso dipende dalla *forma* dell'onda sonora che, come detto, è determinata dalle ampiezze dei singoli armonici.

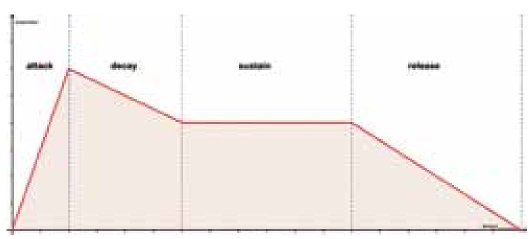
Indipendentemente dallo strumento che lo genera, il suono può essere *scomposto* nelle proprie componenti fondamentali (*analisi armonica*) o viceversa può essere *riprodotto* fedelmente sommando opportune onde sonore semplici (*sintesi armonica*). Ad esempio il flauto dolce emette un suono composto dalla fondamentale e da pochissime armoniche successive (da un certo punto in poi sono impercettibili) mentre gli strumenti ad arco producono suoni composti da molte più armoniche (percettibili).

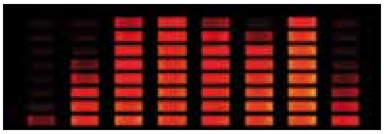
[CAMPIONI DAL MONDO]

Già D. Bernoulli, avendo scoperto vibrazioni di forma irregolare, "a punta", come le onde triangolari o quadre, sosteneva che anch'esse fossero date dalla sovrapposizione di vibrazioni "lisce", semplici e regolari nel tempo. Grazie alla sua intuizione, fortemente contrastata dai matematici "puristi" fino alla dimostrazione data da Fourier, con i moderni **sintetizzatori** riusciamo oggi a riprodurre uno stesso suono con la "voce" del violino, del pianoforte o del sassofono o addirittura, usando il protocollo **MIDI**, a far suonare una base musicale da un'intera orchestra di strumenti attraverso un *sequencer* installato su un PC.

Sopra: Yamaha DX7 (1982), il primo sintetizzatore digitale, basato su una sintesi a modulazione di fase.

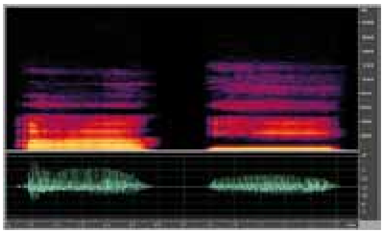
Un altro fattore che determina il timbro di uno strumento è l'*evoluzione* nel tempo del suono emesso.
Essa può essere analizzata, grazie alla possibilità di *campionare* (digitalizzare) i suoni, attraverso:
· le quattro fasi dell'**inviluppo** del suono, ossia la variazione nel tempo della sua *ampiezza*;





· i **sonogrammi** e gli **spettrogrammi**, che rappresentano rispettivamente la distribuzione e la variazione nel tempo delle frequenze del suono;

Sopra, a sinistra: L'ecografia è un sonogramma diagnostico generato attraverso riflessione (eco) di ultrasuoni. Sopra, a destra: Lo spettrogramma di un equalizzatore grafico.

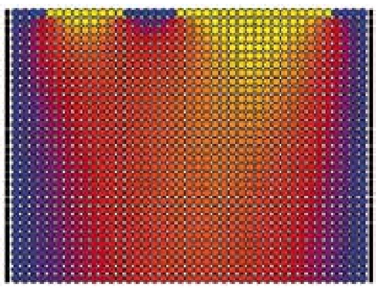


· la **teoria delle formanti** del suono, secondo cui il *timbro* di uno strumento dipende non solo dalla *sorgente* sonora (ad esempio, la corda) ma anche dal *risuonatore* (ad esempio, la cassa armonica) e dall'*adattatore* (accorgimenti per migliorare la propagazione); studia anche le differenze tra voci umane.

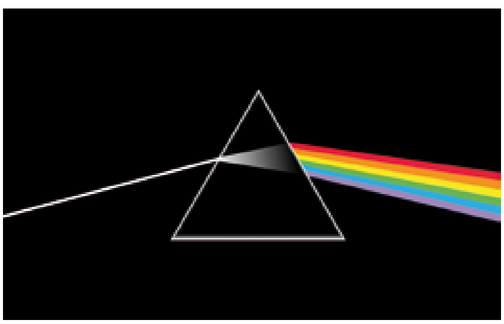
Sopra: *Sonogrammi* dei suoni vocalici "a" ed "i" e relative forme d'onda (da Wikipedia).

Qui di seguito, vedete un'elaborazione grafica del modello di Fourier per la propagazione del calore. È evidente l'analogia con un sonogramma.

A fianco: Modello matematico della propagazione del calore (cortesia di G. Wanner).



Il **rumore bianco** è un fenomeno sonoro non periodico e di ampiezza costante su tutto lo spettro (idealmente infinito) di frequenze. Una radiazione luminosa con le stesse caratteristiche, ossia in cui tutti i colori sono presenti con la stessa intensità, ci apparirebbe come luce bianca.



Sopra: Dispersione della luce bianca attraverso un prisma newtoniano nella celeberrima copertina di "The Dark Side of the Moon" dei Pink Floyd (1973).

Riproducendo un rumore bianco entro una banda di frequenze udibili, si ottiene un *fruscio continuo* usato spesso in alcuni ambienti per coprire il rumore di fondo o favorire il rilassamento.

Sopra: Rumore bianco elettromagnetico su un vecchio TV.

Pierre Schaeffer nelle sue composizioni di *Musique Concrète* (1948), grazie alla "nuova" tecnologia del disco di vinile, utilizzava da dee-jay antesignano "qualsiasi materiale sonoro, sia rumore o musica tradizionale" fondendo suoni strumentali e rumori della vita quotidiana (respiri, passi, fischi, battiti…) in modo da realizzare una "composizione senza l'aiuto, divenuto impossibile, di una notazione musicale tradizionale". È il definitivo abbandono della scala musicale classica e il passaggio verso una nuova musica, quella ***elettronica***, di cui **K.H. Stockhausen** è uno dei primi esponenti (usava campioni su nastro magnetico sin dal 1956).

[UFFICIO SEMPLIFICAZIONI AFFARI COMPLESSI]

In definitiva, possiamo affermare che proprio i numeri chiamati *complessi* servono in realtà a tradurre *complicati* fenomeni in *semplici* modelli matematici. L'esempio del suono composto da suoni semplici è quello principale, ma non l'unico.

L'opera di Fourier è in effetti servita a semplificare molti contenuti matematici altrimenti inarrivabili, tanto che **H. Poincaré** (1893) la ritenne una pietra miliare della Matematica. A conferma di ciò, proponiamo una cronologia (sicuramente incompleta) delle sue **intersezioni** con altri campi di studio, precedenti o successivi a Fourier:

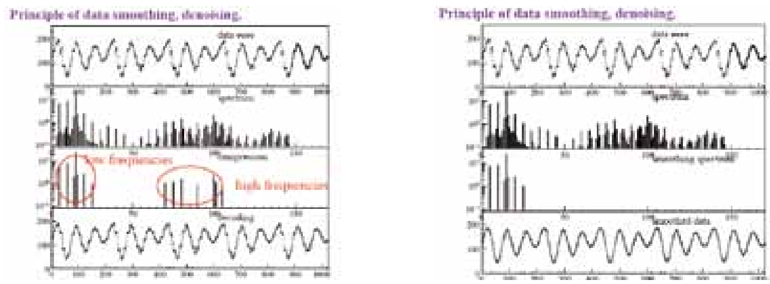
• equazioni differenziali non lineari (Eulero 1739);
• teoria delle onde sonore (Lagrange 1759);
• perturbazioni secolari delle orbite dei pianeti (Lagrange 1770, Leverrier 1846, Einstein 1916);
• teoria del calore (Fourier 1807, 1822);
• onde elettromagnetiche (Maxwell 1865);

• equazione di Schrödinger (1926): ogni particella viene rappresentata con una funzione d'onda;
• manipolazione di suoni, immagini e video (FFT 1965, JPEG 1983, MPEG 1988, MP3 1995, DivX1999).

Gli stessi vari tentativi di dimostrazione della convergenza della serie di Fourier introdussero molte **novità** di non poco conto nella Matematica:
· concetto moderno di funzione e monotonia (P.G. Dirichlet 1829);
· integrale definito (B. Riemann 1854, H. Lebesgue 1903);
· teoria degli insiemi (G. Cantor 1870);
· spazi di Hilbert (1909);
· teoria delle distribuzioni (L. Schwartz 1944).

Grazie all'Analisi armonica e al fatto che luce e suono sono fenomeni analoghi (entrambi sono descritti da un modello ondulatorio), sono state via via sempre più numerose le **innovazioni tecnologiche** indotte da applicazioni del teorema di Fourier:
· **CD Audio** (Sony e Philips 1980): si registrano campioni di frequenza 44.1 kHz, doppia (come prevede il teorema di *Nyquist-Shannon*) rispetto a quella massima del segnale da acquisire (l'orecchio umano non va oltre i 20 kHz);
· scoperta delle **microonde** (Hertz 1887): fu la conferma sperimentale dell'esistenza delle onde elettromagnetiche previste da Maxwell nel 1873;
· **DSP** (processori di segnali digitali): usano un algoritmo chiamato *FFT* (Fourier Fast Transform) per convertire campioni sonori in dati di frequenza e risalire così all'equazione dell'onda acquisita; sono strumenti fondamentali nello sviluppo dell'Elettronica e della Teoria dei segnali;
· grazie all'uso dei raggi X: la scoperta della doppia elica del **DNA** (J. Watson e F. Crick 1953) e l'invenzione della **TAC** (G. Hounsfield e A. Cormack, Nobel per la medicina 1979);
· la ricostruzione di immagini dalla **RMN** (risonanza magnetica nucleare);
· **radiotelescopi**: usando la tecnica della *interferometria*, hanno permesso la scoperta di quasar e pulsar distanti milioni di anni luce.

Un accenno finale va necessariamente dedicato ad un'ultima tecnologia, sempre dovuta a Fourier e molto nota agli "smanettoni": la **compressione** di suoni e immagini digitalizzati e memorizzati sui nostri PC sotto forma di *file*. Mentre nei CD audio i dati non venivano compressi (codifica PCM), con lo standard **MP3** e l'uso della FFT si "tagliano" le frequenze non udibili e le armoniche secondarie. Le tracce video dei DVD utilizzano un processo simile (compressione **MPEG**), così come le immagini in formato **JPEG**: grosso modo è come comprimere un "suono" che si propaga non in una ma in due dimensioni. Altri algoritmi di semplificazione (detti *filtri*) tagliano le frequenze componenti più alte e rendono l'onda più "liscia" e meno frastagliata. Nelle immagini successive sono rappresentate nell'ordine:
1. la codifica digitale di una "i" parlata (in inglese "eee"), la *compressione* del campione per eliminazione delle frequenze più deboli e la successiva decodifica in audio (onda sonora risultante);
2. il processo di *smoothing* (lisciatura) ossia di eliminazione delle frequenze più alte (non udibili), o dei fenomeni di disturbo e la decodifica in audio con un ridotto numero di armoniche e un'onda risultante "semplificata".



Sopra: Schema di funzionamento della compressione di dati audio (MP3) e dei filtri di "pulitura" del suono (cortesia di G. Wanner).

[RIFLESSIONE FINALE]

Termina qui, sperando che vi sia piaciuta, la nostra lunga passeggiata tra numeri e note, scandita dall'inerpicata sulla scala musicale attraverso i vari insiemi numerici. Abbiamo ripercorso diverse tappe fondamentali nella storia della Matematica e della Musica (ma non solo) osservando come, da questo particolare punto di vista, all'evoluzione scientifica si sia sempre affiancata un'evoluzione estetica, artistica e stilistica. La ricerca del "come", cioè, non è mai stata scissa dalla ricerca del "bello". Giunti al capolinea, permane intatto, se non amplificato, il nostro stupore nel constatare quanta strada abbia percorso l'umanità in seguito ad un semplice "pizzico" ad una corda da parte di Pitagora, dopo una propizia visita nella bottega di un fabbro crotonese. È lì che il maestro capì quanto gusto c'è ad essere matematici, musicisti e (perdonatemi un ultimo vezzo!) calabresi. Ipse dixit. Ipse sonavit. ////////// :)

[BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA]

• N. Chiriano, *Onda su onda su onda... J.B. d'Alembert fa luce sul suono*, Alice&Bob n. 19, lug-ago 2010
• N. Chiriano, *A ritmo di log. G.W. Leibniz e i "numeri dei rapporti"*, Alice&Bob n. 17-18, mar-giu 2010
• N. Chiriano, *Il restauro della Scala. Il "temperino" di J.S. Bach*, Alice& Bob n. 16, gen-feb 2010
• N. Chiriano, *Pitagora e la Musica*, Alice&Bob n. 15, nov-dic 2009
• Ph. Henry, G. Wanner, *From Euler to Fourier*, MP3 and JPEG, Zürich 2007
• P. Odifreddi, *Penna, pennello e bacchetta*, GLF Laterza, 2005
• A. Cremaschi, F. Giomi, *Rumore bianco. Introduzione alla musica digitale*, Zanichelli, 2008
• A. Frova, *Fisica nella Musica*, Zanichelli, 1999
• L. Berio, T. Regge, *Vicino alla musica (CD ROM)*, Zanichelli, 1999
• E. Prestini, *Un matematico freddoloso e l'effetto serra*, su http://matematica.unibocconi.it
• pagine Fisica Onde Musica su http://fisicaondemusica.unimore.it/
• portale Musica su www.wikipedia.org