Il restauro della Scala. Il “temperino” di J.S. Bach //

Nicola Chiriano
Docente al Liceo scientifico “L. Siciliani” di Catanzaro

SIAMO ALLA SECONDA PUNTATA DEL NOSTRO VIAGGIO TRA NUMERI E NOTE. IN QUELLA PRECEDENTE DESCRIVEVAMO COME, NONOSTANTE ZARLINO FOSSE RIUSCITO A MODIFICARE LA SCALA PITAGORICA IN MODO DA RENDERLA “ANCORA PIÙ NATURALE”, PERSISTESSERO TUTTAVIA FORTI DIFFICOLTÀ PRATICHE DI ACCORDATURA DEGLI STRUMENTI MUSICALI. >>>>>>>>>>>>>>>>>>>>

[MANOSCRITTO ORIGINALE DE IL CLAVICEMBALO BEN TEMPERATO / IMMAGINE DI PUBBLICO DOMINIO]

[NICOLA CHIRIANO]
Nicola Chiriano è docente di Matematica e Fisica al Liceo scientifico "Siciliani" di Catanzaro. Si occupa di didattica e ICT; è formatore in diversi corsi per docenti e studenti di vari ordini di scuola. Ha all'attivo diverse collaborazioni con Ansas (e-tutor corsi Pon Tec) e Invalsi (piano di formazione Ocse-Pisa). È appassionato di matematica della musica e di musica della matematica.

[PREMESSA]

Ecco i problemi indotti dall'uso della scala naturale:
1. l'ambiguità tra le due coppie di intervalli di tono (*minore* e *maggiore*) e di semitono (*diatonico* e *cromatico*);
2. il tono non era diviso in due semitoni uguali;
3. le *note alterate*, introdotte per completare la scala, risultavano *enarmoniche* (ad es. Do# ≠ Re♭) ossia separate da un *comma pitagorico* ($3^{12}/2^{19}$);
4. il *ciclo delle quinte* non si chiudeva dopo 12 applicazioni ma generava una spirale;
5. non era possibile *modulare la tonalità* senza stonature: iniziando la scala da una nota diversa dal *Do*, non si generavano sequenze equivalenti di toni e semitoni. Ad esempio, le seguenti quinte differiscono per un *comma sintonico* (81/80):

$$\underbrace{\frac{Sol}{Do}=\frac{3}{2}}_{\text{quinta giusta}} \neq \underbrace{\frac{La}{Re}=\frac{40}{27}}_{\text{quinta calante}}$$

Si tratta di effetti generati da un'unica causa: nella scala cromatica, i semitoni tra una nota e la precedente non risultavano tutti e 12 uguali fra loro.

[UNA SCALA SENZA BARRIERE]

Ostinarsi ad usare le frazioni portava ad un vicolo cieco: la soluzione del problema è infatti esterna all'insieme Q dei numeri razionali. Forse anche per questo né Pitagora né lo stesso Zarlino vi si cimentarono più di tanto, nonostante l'intuizione avuta da **Aristosseno di Taranto** già nel IV sec. a.C.

Richiedere infatti che i semitoni siano uguali:

$$\frac{Do\#_1}{Do_1}=\frac{Re_1}{Do\#_1}=\ldots=\frac{Do_2}{Si_1}=k$$

con k costante da determinare, equivale a dire che

$$\frac{Do_2}{Do_1}=k^{12}$$

ovvero, poiché i due Do distano fra loro un'ottava, a

$$k^{12}=2$$

e quindi, per definizione di radice n-ma,

$$k=\sqrt[12]{2}\approx 1.059463\approx 1.06.$$

Questo valore, dal punto di vista matematico, risolve tutti e cinque i problemi visti prima:
1. esistendo unico l'intervallo di semitono ($\sqrt[12]{2}$), sarà unico anche l'intervallo di tono ($\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[6]{2}$);
2. il tono risulta così diviso in due semitoni uguali;
3. per come l'abbiamo determinato, questo rapporto fa sì siano equivalenti le coppie di *note alterate*:
Do# = Re♭, Re# = Mi♭, Fa# = Sol♭, Sol# = La♭, La# = Si♭ ;
4. il *ciclo delle quinte* si chiude dopo 12 passi, pari a 7 ottave. Infatti, mentre con la pitagorica, si ha:

$$\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}_{\text{12 quinte}} \neq \underbrace{2^7}_{\text{7 ottave}}$$

con una quinta pari a sette semitoni:

$$\frac{Sol}{Do}=k^7=\sqrt[12]{2^7}$$

si ha la chiusura esatta e definitiva:

$$\underbrace{\left(\sqrt[12]{2^7}\right)^{12}}_{\text{12 quinte}}=\underbrace{2^7}_{\text{7 ottave}}$$

5. riguardo le sequenze di toni e semitoni, scale che iniziano da note diverse non risultano più differenti.

Ecco come, dai numeri razionali tanto cari a Pitagora e Zarlino, si passa "musicalmente" ai numeri "*surdi*" che non sono esprimibili come *ratio*, rapporto, frazione. Sono appunto i numeri **irrazionali**.

Un ritocco in questo senso dei gradini della scala naturale appare almeno di buon senso: chiunque inciamperebbe su una scala dai gradini diseguali ! Nel mondo fatto a scale della fine del XVI sec., la *ratio* è però anch'essa un gradino difficile da superare, nonostante i numeri "*surdi*" fossero già usati nella risoluzione delle equazioni algebriche.

[TEMPERAMENTO PATERNO]

Fu così che un discepolo di Zarlino dal figlio famoso, **Vincenzo Galilei**, precursore della musica barocca, propose di modificare la scala naturale adottando un semitono costante ma razionale, pari a:

$$\frac{18}{17} \approx 1.058823 \approx \sqrt[12]{2} \ .$$

Vennero fuori, con le tecniche di accordatura dell'epoca, strumenti fino a 31 tasti per ottava, rendendo decisamente fallimentare questa scelta.

La soluzione adottata da Galilei fu contestata ai primi del '600 dal matematico **Simone Stevino**, padre della polifonia fiamminga, secondo cui l'unica scala esatta era quella con dodici scalini uguali prima descritta, ossia il *diàtonon syntonon* di Aristosseno, che passò alla storia come **temperamento equabile**.

La scala di Stevino era a quei tempi impossibile da costruire in modo esatto, come effettivo temperamento (accordatura ciclica), per l'assenza di intervalli "giusti" di riferimento.
La sua introduzione risolse tanti problemi, ma ne aprì uno duplice:

- l'accordatura "naturale" per quinte è comoda per i musicisti ma non permette di chiudere il ciclo e quindi non soddisfa i matematici;
- la divisione "equabile" della scala è matematicamente possibile ma non soddisfa l'orecchio fine degli accordatori, nonostante i tanti vantaggi visti.

Un altro tentativo, noto come **temperamento mesotonico**, era stato proposto agli inizi del '500. Si basava su un unico intervallo di tono pari a $\sqrt{5}/2$, di modo che l'intervallo di terza risultasse "giusto":

$$\frac{\text{Mi}}{\text{Do}} = \frac{\text{Re}}{\text{Do}} \cdot \frac{\text{Mi}}{\text{Re}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4} \ .$$

Inoltre, mentre nella scala pitagorica, il Mi si ottiene con quattro quinte dal Do di frequenza unitaria:

$$\text{Mi}_3 = (\text{Sol}_1)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \approx 5.062$$

nella mesotonica, esso ha un valore "zarliniano":

$$\text{Mi}_3 = 5$$

essendo il 5° armonico del Do_1; da esso si ricava a ritroso la quinta, che risulta un po' più "stretta":

$$\text{Sol}_1 = \sqrt[4]{5} \approx 1.495 < \frac{3}{2} \ .$$

La soluzione mesotonica non ebbe fortuna perché, pur essendo "meno irrazionale" dell'equabile, usando radicali di indice 4 invece che 12, non eliminava le differenze tra i due semitoni o tra le note alterate. La spirale di quinte, inoltre, generava la "*quinta del lupo*" Lab/Do#, stonata di circa un quarto di tono.

Perché proporre un temperamento basato sulla terza giusta? L'ottava della scala naturale si ottiene da una quarta e una quinta giuste:

$$\underset{\text{quarta}}{4/3} \cdot \underset{\text{quinta}}{3/2} = \underset{\text{ottava}}{2}$$

ma, a sua volta, la quinta giusta si ottiene componendo due terze, una maggiore e una minore:

$$\underset{\text{terza maggiore}}{5/4} \cdot \underset{\text{terza minore}}{6/5} = \underset{\text{quinta giusta}}{3/2}$$

Storicamente, prima di passare alla scala equabile "esatta", ci fu il passaggio intermedio attraverso un compromesso tra i vari temperamenti.

[IL COMPROMESSO (S)TONICO]

Nel 1691 il musicista tedesco **Andreas Werckmeister** (1645-1706) scoprì un temperamento composto da cinque quinte mesotoniche e sette quinte pitagoriche, con cui riuscì a chiudere il ciclo delle quinte quasi perfettamente:

quinte mesotoniche:

$$\sqrt[4]{5} = \frac{\text{Sol}}{\text{Do}} = \frac{\text{Re}}{\text{Sol}} = \frac{\text{La}}{\text{Re}} = \frac{\text{Fa\#}}{\text{Si}}$$

quinte pitagoriche:

$$\frac{3}{2} = \frac{\text{Si}\flat}{\text{Mi}\flat} = \frac{\text{Fa}}{\text{Si}\flat} = \frac{\text{Do}}{\text{Fa}} = \frac{\text{Mi}}{\text{La}} = \frac{\text{Si}}{\text{Mi}} = \frac{\text{Do\#}}{\text{Fa\#}} = \frac{\text{Sol\#}}{\text{Do\#}}$$

ciclo di quinte:

$$(\sqrt[4]{5})^5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = 5\sqrt[4]{5}\left(\frac{3}{2}\right)^7 \approx 127{,}75 \approx 128 = 2^7 \ .$$

La piccola differenza tra i due valori, che viene lasciata nella quinta Mi♭/Sol#, è detta **schisma**.

Non si trattava pertanto di un temperamento equabile rigoroso, steviniano, poiché l'ottava non risultava divisa in parti uguali. Si basava però su ben noti rapporti "giusti", la quinta pitagorica (3/2) e la terza maggiore mesotonica (5/4), ed era quindi utilizzabile in pratica. Fu indicato come **temperamento buono** o *inequabile* e gli strumenti accordati con tale tecnica si dissero di conseguenza **"ben temperati"**. In essi, poiché differenti tra loro, anche se di pochissimo, le varie tonalità assumevano caratteri tipici diversi.

La scala temperata di Werckmeister fu molto apprezzata dai musicisti, in particolare da **Johann Sebastian Bach** (1685-1750), che la utilizzò nel suo "*Clavicembalo ben temperato*", una pietra miliare nella storia della musica, croce e delizia degli studenti di pianoforte. Quando al Conservatorio si scherza dicendo che Bach "*aveva un buon temperamento*", o che scriveva buona musica perché "*aveva un buon temperino*", ci si dimentica del fatto che fosse solo l'utilizzatore finale della scoperta di un suo conterraneo e che le matite in legno furono commercializzate da Faber solo nell'800!

La svolta che Werckmeister diede alla musica tre secoli fa, prima dell'avvento definitivo del sistema equabile, fu davvero epocale. Sostituendo intervalli naturali, matematicamente "giusti" e più piacevoli all'orecchio, con intervalli impuri, imprecisi e non costanti, comunque basati sull'*irrazionalità* (dei numeri!), in qualche modo ruppe il rapporto con le armonie delle sfere celesti celebrate da Pitagora. È una svolta descritta magistralmente dal regista **Béla Tarr** in un suo film di qualche anno fa.

Eszter, uno dei protagonisti, incolpa Werckmeister di aver corrotto l'armonia interiore dell'universo separando la musica dal divino: se si vuole di nuovo l'ordine nel mondo, bisogna abolire il suo sistema tonale alla base della musica moderna dopo Bach. Questa è la sua ossessione.

Com'è possibile suonare qualsiasi musica con il piano? Tra due tasti bianchi ci sarebbe bisogno di due neri, invece di uno solo. È un trucco. Il piano è uno strumento falso, al contrario del violino. Questo "normale compromesso" fa parte della cultura europea degli ultimi 300 anni.

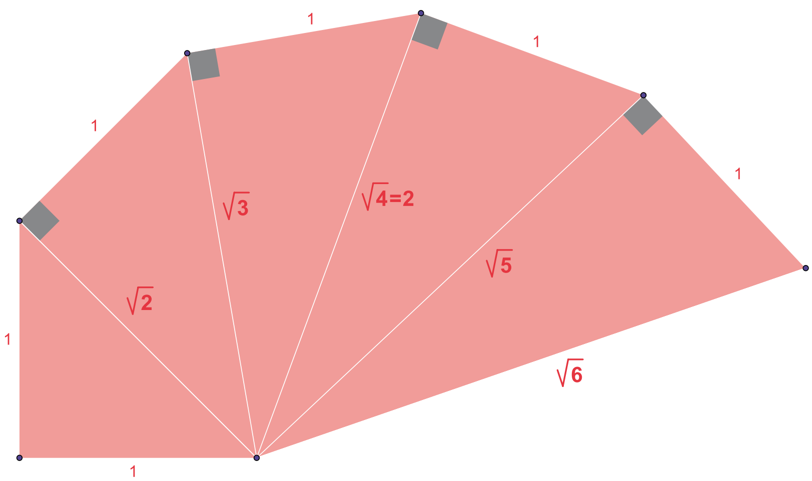
La reazione di Eszter è quella dei "puritani" coevi di Werckmeister, quella furiosa degli dei verso Prometeo che dona il fuoco agli umani o quella dei pitagorici sconvolti dall'incommensurabilità della diagonale del quadrato rivelata da Ippaso di Metaponto. Ma è la storia, bellezza! La musica (come i numeri su cui essa si basa) inizia ad assumere i contorni del *continuo*, sua proprietà intrinseca ben più che il *discreto*. Intanto il temperamento "buono" apre le porte a quello "equabile" vero e proprio.

A sinistra: Locandina de "Le armonie di Werckmeister" (2000).

Sopra: J.S. Bach.

[METTIAMOLI D'ACCORDO]

Data l'impossibilità di una rappresentazione geometrica "con riga e compasso" di $\sqrt[12]{2}$ (gli abitanti di Delo ebbero seri problemi già con $\sqrt[3]{2}$) il temperamento equabile, pur essendo "la" soluzione a livello teorico, non era perfettamente realizzabile in pratica: la suddivisione esatta di una corda si può ottenere solo con numeri razionali o con radici quadrate. Ecco perché forse si passò attraverso il sistema mesotonico: $\sqrt{5}$ e $\sqrt[12]{2}$ sono entrambi radicali, ossia irrazionali algebrici, ma $\sqrt{5}$ si può anche "disegnare".



Con uno strumento accordato in modo equabile si può facilmente modulare da una tonalità ad un'altra ma ancora oggi alcuni strumenti sono accordati in modo naturale, *just intonation*.

Il violino viene accordato ad intervalli di quinta giusta. Le sue quattro corde emettono le note:

$$Sol_2 - Re_3 - La_3 - Mi_4$$

dove il Do_3 è quello centrale del pianoforte. Non avendo tasti ad intonazione fissata, con il violino e con tutti gli strumenti a corda si possono emettere suoni di qualsiasi frequenza tra la più bassa e la più alta riproducibili (valori "continui" e non "discreti").

Non essendoci più "personalità" diverse tra le varie tonalità, ciascuna di esse ha dignità pari alle altre. Tale assenza di "gerarchie" tra le note, è il fondamento della *musica dodecafonica* di **Arnold Schönberg** (1874-1951) o della *musica esatonale* di **Claude Debussy** (1862-1918), quest'ultima basata su un'ottava suddivisa in sei toni uguali pari a $\sqrt[6]{2}$.

Tra il '600 e il '700 alcuni autori come **Mersenne**, **Rameau** e **d'Alembert**, basandosi sulla teoria dei suoni armonici ben prima di **von Helmholtz**, diedero la giustificazione scientifica della "naturalità" della scala di Pitagora e Zarlino.

L'alternanza di giudizi pro o contro il sistema equabile, da parte di matematici o musicisti, contò anche il contributo di due "mostri sacri", uno per parte. Secondo **Leibniz** (1709), per cui l'estetica musicale è frutto di un inconsapevole esercizio aritmetico, solo orecchi allenati potevano cogliere le "stonature" della scala equabile. **Tartini** (1754) invece bollò il temperamento equabile come inaccettabile. La maggioranza dei musicisti, comunque, continuò a considerarne i vantaggi superiori agli svantaggi. Il compromesso si rivelò efficace e fu assorbito pian piano dalla sensibilità musicale occidentale.

Nel 1743 lo svedese **Strähle** trovò un sistema di accordatura per chitarra che approssimava quasi alla perfezione il temperamento equabile ma tale tentativo fu stroncato, a causa di un calcolo errato, dal matematico **Faggot**.

Metodi sempre più precisi per accordare uno strumento in modo equabile furono trovati verso la fine dell'800. Bisogna però attendere fino al 1917 perché **William Braid White** arrivi a sviluppare un metodo pratico per accordare un pianoforte secondo un temperamento equabile rigoroso. Oggi con l'elettronica non si hanno più certi problemi.

[NON È SEMPRE LA SOLITA SOLFA]

Chiudiamo con alcuni confronti numerici tra il temperamento equabile e quello naturale.

Intervalli //

Come già detto, le distanze "assolute" tra le note non sembrano poi così abissali tra i due sistemi:

Sist. equabile	vs.	Sist. naturale
Semitono $\sqrt[12]{2} \approx 1.059$	poco più grande del	Semitono pitagorico $\frac{256}{243} \approx 1.053$
Tono $\sqrt[6]{2} \approx 1.122$	poco più piccolo del	Tono maggiore naturale $\frac{9}{8} \approx 1.125$
Quinta $\sqrt[12]{2^7} \approx 1.498$	poco più piccola della	Quinta naturale $\frac{3}{2} \approx 1.500$

Note //

Passiamo alle differenze (e ai rapporti) tra le frequenze delle note tra i due sistemi. Scegliendo in entrambi La$_3$ = 440 Hz, cosa accade alla *solfa*?

> "*Battere la solfa*" = solfeggiare, leggere le note (come Sol e Fa) di uno spartito scandendone il tempo con la mano = ripetere una cosa fino alla noia. "*Solfa*" è, per estensione, un qualsiasi insieme di note musicali, come ad es. una scala.

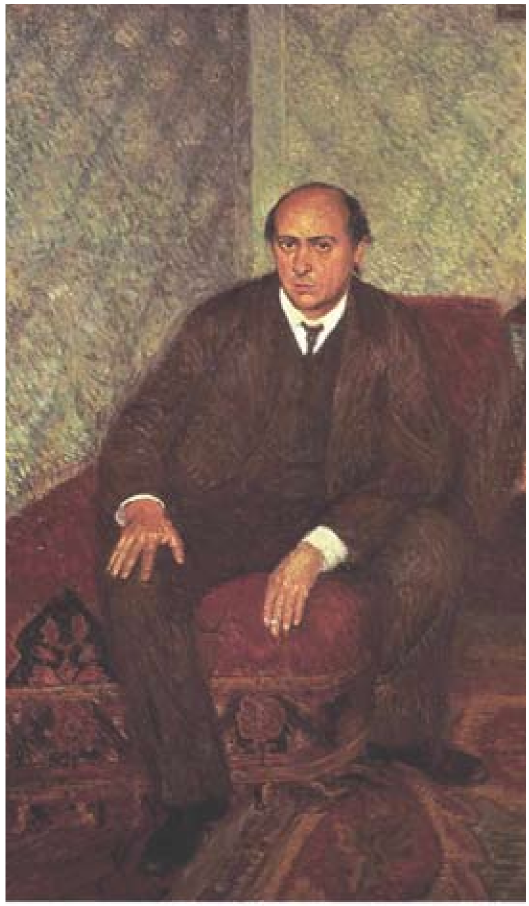
In effetti, eccezioni a parte, non sembrerebbe che le frequenze varino poi così tanto tra i due sistemi.

	Naturale				Equabile				Equ vs Nat	
Nota	*Freq (Hz)*	*Nota Do*	*Δ (Hz)*	*Nota prec*	*Freq (Hz)*	*Nota Do*	*Δ (Hz)*	*Nota prec*	*Δ (Hz)*	*Δ (%)*
Do$_3$	264,0	1,00	-	-	261,6	1,00	-	-	-2,4	0,9
Do#	275,0	1,04	11,0	1,04	277,2	1,06	15,6	1,06	2,2	-0,8
Reb	285,1	1,08	10,1	1,04					-7,9	2,8
Re	297,0	1,13	11,9	1,04	293,7	1,12	16,5	1,06	-3,3	1,1
Re#	309,4	1,17	12,4	1,04	311,1	1,19	17,5	1,06	1,8	-0,6
Mib	316,8	1,20	7,4	1,02					-5,7	1,8
Mi	330,0	1,25	13,2	1,04	329,6	1,26	18,5	1,06	-0,4	0,1
Fa	352,0	1,33	22,0	1,07	349,2	1,33	19,6	1,06	-2,8	0,8
Fa#	366,7	1,39	14,7	1,04	370,0	1,41	20,8	1,06	3,3	-0,9
Solb	380,2	1,44	13,5	1,04					-10,2	2,7
Sol	396,0	1,50	15,8	1,04	392,0	1,50	22,0	1,06	-4,0	1,0
Sol#	412,5	1,56	16,5	1,04	415,3	1,59	23,3	1,06	2,8	-0,7
Lab	422,4	1,60	9,9	1,02					-7,1	1,7
La$_3$	440,0	1,67	17,6	1,04	440,0	1,68	24,7	1,06	-	-
La#	458,3	1,74	18,3	1,04	466,2	1,78	26,2	1,06	7,8	-1,7
Sib	475,2	1,80	16,9	1,04					-9,0	1,9
Si	495,0	1,88	19,8	1,04	493,9	1,89	27,7	1,06	-1,1	0,2
Do$_4$	528,0	2,00	33,0	1,07	523,3	2,00	29,4	1,06	-4,7	0,9

Com'è che allora esse ci suonano tanto "stonate" tra loro da non sembrare della... stessa solfa? Il fatto è che le orecchie non contano come le dita: conosceremo il loro sistema numerico alla prossima puntata.

[RIFLESSIONE FINALE]

I detrattori della scuola italiana la definiscono a volte "da Medio Evo". Ma in quell'epoca, in realtà, si studiavano le arti liberali del *trivio* (Grammatica, Retorica e Dialettica) e del *quadrivio* (Aritmetica, Geometria, Astronomia e Musica). Senza basi culturali comuni, matematici e musicisti del Rinascimento non avrebbero mai dato... il *La* alla musica moderna. Per non parlare delle scuole dell'antichità classica, come quella pitagorica. Una scuola che non preveda lo studio della Musica come disciplina scientifica, oltre che artistica, sarebbe forse da definire più propriamente... preistorica.



Sopra: Ritratto di Arnold Schönberg realizzato da Richard Gerstl (1883-1908) - particolare / Immagine di pubblico dominio.

[BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA]

• N. Chiriano. Pitagora e la musica. *Alice & Bob* n.15, dicembre 2009.

• A. Frova. *Fisica nella Musica*. Zanichelli, Bologna 1999.

• P. Odifreddi. *Penna, pennello e bacchetta*. Laterza, Bari, 2005.

• L. Berio, T. Regge, F. Tibone. *Vicino alla musica* (cd-rom). Zanichelli, Bologna.

• M. Degiovanni et al. *Matematica per la vita*. Fondazione Achille e Giulia Borioli, Milano 2009.

• P. Italia. Musica e matematica. In *Nuova umanità*. XXVI n. 152 (2004/2).

• W. Maraschini. *Sette note e infiniti numeri*. Su www.treccani.it.

• FOR Laboratorio di Matematica e Musica. Su http://for.indire.it

• www.wikipedia.org. Portale Musica.

// :)