107. "Affelinità" nel piano

di Nicola Chiriano[1]

1 Premessa

Nel curricolo di Matematica al Liceo Scientifico PNI, uno dei temi caratterizzanti (e più trascurati) riguarda le **trasformazioni geometriche** nel piano. Gli allievi dovrebbero apprenderne le definizioni in prima liceo, la classificazione in seconda, le equazioni in terza, la trattazione matriciale in quarta e infine, in quinta, dovrebbero saperle applicare ai grafici di funzione reale.
Essendo quindi un argomento trasversale nel tempo e nella collocazione tra varie branche della Matematica, è facile che i ragazzi possano, prima del loro insegnante, venir presto colpiti da… intolleranza per assuefazione. Occorre pertanto un'idea per renderle più *user friendly*, magari usando il PC, visto che siamo al PNI.

Il *deus ex machina* della situazione è il software open-source **Geogebra** [www.geogebra.org], usando il quale ho personalmente constatato come la mia azione didattica potesse utilmente giovarsi di ciò che i ragazzi chiamano "vedere a cosa serve la Matematica", un "toccare con mano" che li riempie di soddisfazione.
Ho poi chiesto aiuto al ***gatto di Arnol'd***, da sempre disponibile ed abituato ad essere deformato in ogni direzione [1]. Il matematico russo Vladimir Arnol'd usò in effetti l'immagine di un gatto per mostrare gli effetti di una *trasformazione caotica* da lui studiata: applicandola ripetutamente, il povero gatto viene tagliuzzato, arrotolato, parcellizzato, "fantasmizzato", sottoposto a penose deformazioni [2] e, solo dopo un certo numero di iterazioni, riportato allo stato (integro) iniziale.

Premetto alla nostra discussione alcuni doverosi ma brevi cenni teorici. Consiglio di approfondire il tema su alcuni validi testi scolastici come ad es. [3] o [4].

2 Definizioni e proprietà (sintesi)

Una trasformazione geometrica lineare è una corrispondenza tra i punti del piano per cui, fissato un punto $P(x,y)$, le coordinate del punto suo trasformato $P'(x',y')$ sono in generale della forma:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

o, usando le matrici:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

ovvero $\underline{v}' = A \cdot \underline{v} + \underline{t}$, dove A è la matrice associata alla trasformazione, $\underline{v}' \equiv \overrightarrow{OP'}$ è il trasformato di $\underline{v} \equiv \overrightarrow{OP}$ tramite A e $\underline{t}$ è un vettore di traslazione. Indicheremo con A indifferentemente la trasformazione (1) o la matrice ad essa associata.

Senza perdere di generalità, ci limitiamo a trattare il solo caso in cui $\underline{t} \equiv \underline{0}$: infatti, in forma compatta

$$\underline{v}' = A \cdot \underline{v} + \underline{t} \Leftrightarrow \underline{v}' - \underline{t} = A \cdot \underline{v} \Leftrightarrow \underline{w} = A \cdot \underline{v}$$

ossia il sistema (1) assume la forma

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Si può verificare come la **composizione** tra due trasformazioni A e B sia caratterizzata dalla matrice prodotto $B \cdot A$: se $P \overset{A}{\mapsto} P' \overset{B}{\mapsto} P''$, allora $P \overset{B \cdot A}{\mapsto} P''$.

1 Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "L. Siciliani" di Catanzaro.

Se A è biunivoca, ossia se ad ogni punto $P(x, y)$ del piano corrisponde uno e un solo trasformato $P'(x', y')$, A si chiama **affinità** del piano. In tal caso il sistema (2) ammette un'unica soluzione, ossia è determinato. Essendo $|A| \neq 0$, A è invertibile. La sua inversa è data da:

(3) $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

In definitiva, per $|A| \neq 0$, si ha:

$$\underline{v}' = A \cdot \underline{v} \iff \underline{v} = A^{-1} \cdot \underline{v}'.$$

Indicheremo con A^{-1} sia la trasformazione inversa, anch'essa un'affinità, che la matrice ad essa associata.

Riassumendo:

A è un'affinità $\Leftrightarrow$ A è invertibile $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

e quindi

Affinità $\Leftrightarrow$ Trasformazioni lineari invertibili

3 Invarianti delle affinità

In omaggio a Felix Klein e al suo programma di Erlangen (1872), accenniamo al fatto che le affinità, e le trasformazioni in genere, possano essere classificate in *gruppi* sulla base dei loro **invarianti**, ossia delle proprietà del piano che non subiscono modifiche dopo aver applicato la trasformazione.
Rimandando ad una trattazione più completa su [3] o [4], sintetizziamo tale classificazione in una tabella:

Affinità	1. allineamento punti 2. parallelismo
Similitudini	3. ampiezze angoli 4. rapporti tra segmenti
Isometrie	5. lunghezza segmenti

In particolare, appuntiamo le proprietà conseguenti al fatto che un'affinità sia una trasformazione:

lineare $\Rightarrow$ trasforma rette in rette

invertibile $\Rightarrow$ trasforma rette parallele in rette parallele

4 Alcuni esempi di affinità

Identità	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Omotetia di centro O	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Doppio stiramento	$\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto l'asse x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto l'asse y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Simmetria rispetto O	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotazione di α	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
Similitudine	$k \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha \\ \sin\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$

5 Trasformata di una curva γ

Data una curva nel piano di equazione

$$\gamma : F(x, y) = 0$$

per ricavare l'equazione della sua trasformata γ' tramite A ricaviamo anzitutto x e y tramite A^{-1}:

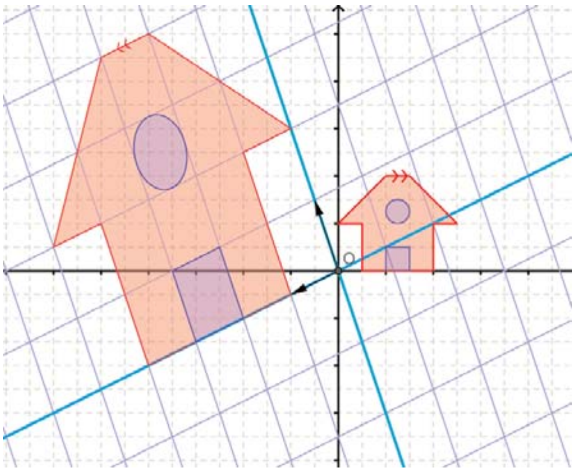
(4) $$A^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{|A|}\left(a_{22}x' - a_{12}y'\right) \\ y = \frac{1}{|A|}\left(-a_{21}x' + a_{11}y'\right) \end{cases}$$

Sostituendo i valori trovati nell'equazione di γ si ha

$$\gamma' : F(x', y') = 0$$

6 Modifica del reticolato

Sin dalle elementari gli allievi usano i "reticolati trasformati" per riprodurre in scala loro disegni:



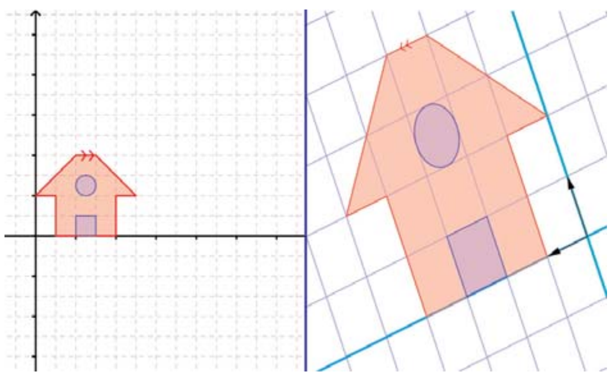
Ora che sono grandi è giunto il momento di rivelare loro che queste figure sono tra loro affini…

La trasformazione del reticolato cartesiano parte dal considerare i trasformati dei versori degli assi, che non sono altro che le due colonne di A, infatti:

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{i}' = A \cdot \mathbf{i} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{j}' = A \cdot \mathbf{j} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Passiamo quindi dal reticolato ortogonale a quadretti unitari ad un reticolato a parallelogrammi di area $|A|$:



$|A|$ è un'area "con segno", ossia l'affinità è:
$|A|>0 \Rightarrow$ **diretta** (conserva l'*orientamento* dei punti)
$|A|<0 \Rightarrow$ **invertente** (lo inverte, come in figura).

Per convenzione il verso positivo di percorrenza di una curva è quello antiorario.

Per determinare i parallelogrammi alla base (sic!) del reticolato trasformato, ricaviamo dalla matrice A:
a) i loro lati $|\mathbf{i}'| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}$ e $|\mathbf{j}'| = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}$
b) l'angolo θ da essi formato, tramite
$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}' = |\mathbf{i}'||\mathbf{j}'| \cos\theta$.

7 Condizioni di Similitudine

Anche i bimbi delle elementari sanno che se il "nuovo" reticolato è fatto di quadrati più grandi, magari ruotati rispetto al reticolato originale, la figura risulterà ingrandita ma manterrà la stessa forma. Ciò si interpreta, al liceo, dicendo che le due figure sono fra loro *simili*. Proviamo a dirlo nel linguaggio più appropriato.

Usare "quadratoni" invece di quadretti significa che:
a) $|\mathbf{i}'| = |\mathbf{j}'| \quad \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2$
b) $\mathbf{i}' \perp \mathbf{j}' \quad \Leftrightarrow a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$.

Tali condizioni sono quindi quelle che A deve soddisfare affinché sia una **similitudine**.

In tal caso i lati tra figure corrispondenti saranno in proporzione e il loro *rapporto di similitudine (k)* sarà uguale a quello tra **i**´ e **i** o tra **j**´ e **j**, ossia:

$$k = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} \ .$$

Possiamo attribuire a k lo stesso segno di $|A|$. A questo punto, è facile individuare una **isometria** come similitudine con $k = 1$ (diretta) o $k = -1$ (invertente).

8 Affinità… per felini ("affelinità")

Siamo pronti a far stiracchiare un po' il nostro gatto *Blue*, ma prima facciamo bene la sua conoscenza. Per costruirlo in modo da occupare il quadratino unitario abbiamo usato, ispirandoci a [2] e rendendolo simmetrico rispetto a $x = 0.5$:

viso: semiellisse di semiassi $a = 0.5$ e $b = 1$
fronte: arco di circonferenza
orecchie: due segmenti rettilinei
occhi: un cerchio e un'ellisse
bocca: triangolo
vibrisse: non esageriamo…

Come visto al punto 6, la trasformazione A è univocamente determinata fissando i vettori $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$, attraverso il loro estremo mobile. Nel foglio di GeoGebra evidenziamo il parallelogramma che genera il nuovo reticolato e che conterrà il viso del gatto trasformato, *Red*.
Il nuovo reticolato è ottenuto costruendo, col comando *Successione[ ]*, due fasci di rette parallele a $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$.

Per ottenere Red, abbiamo applicato l'affinità A^{-1} alle curve che compongono Blue. Ecco cosa accade al viso:

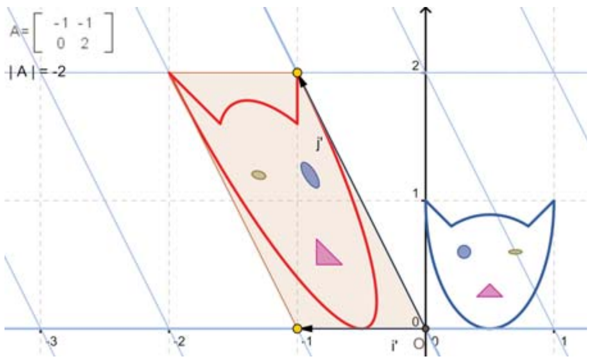
$$\gamma : \frac{(x-0.5)^2}{0.5^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2}=1 \Leftrightarrow \gamma : 4x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

$$\Downarrow A^{-1}$$

$$\gamma' : \frac{\left(\frac{a_{22}x-a_{12}y}{|A|}-0.5\right)^2}{0.5^2}+\frac{\left(\frac{-a_{21}x+a_{11}y}{|A|}-1\right)^2}{1^2}=1$$

Nello stiramento in figura seguente, abbiamo ad esempio

$$\gamma' : 4x^2+4xy+\tfrac{5}{4}y^2+4x+y+1=0$$



Notiamo per inciso che il viso di Red nell'es. ha un *verso* di percorrenza invertito rispetto a quello di Blue e che l'*area* del parallelogramma "di base" del nuovo reticolato è il doppio di quella del quadrato di partenza. Tutte queste informazioni sono ricavabili dal semplice fatto che $|A|=-2$.

9 Rapporti di stiramento e direzioni invarianti

Per completare l'opera, individuiamo caratteristiche essenziali di A ossia, se esistono, le sue direzioni invarianti con rispettivi rapporti di stiramento.

Trovare direzioni invarianti significa trovare vettori che, trasformati, restano multipli di sé stessi, ossia tali che

(5) $\quad A\cdot\underline{v}=\lambda\cdot\underline{v} \Leftrightarrow (A-\lambda\cdot I)\cdot\underline{v}=\underline{0}$

Ciò equivale a chiedere che il sistema omogeneo

(6) $$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0\\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0\end{cases}$$

abbia soluzioni non nulle, ossia non sia determinato, e quindi sia verificata l'**equazione caratteristica** in λ

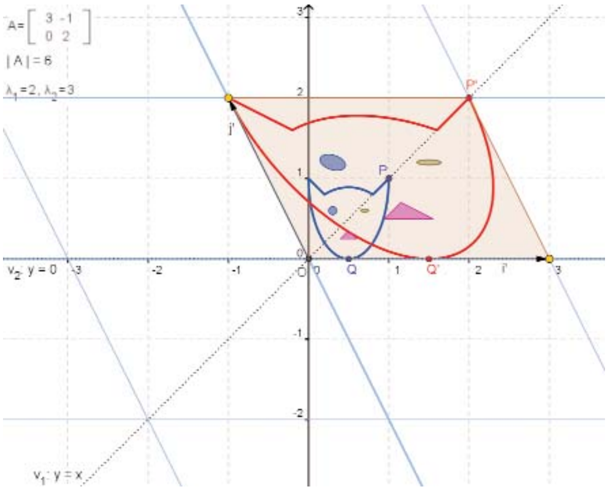
(7) $$\pi(\lambda)=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

Le soluzioni di (7) si dicono ***autovalori*** di A. Sostituendoli nel sistema (6) otteniamo, se esistono, i corrispondenti vettori che soddisfano la condizione iniziale (5), chiamati **autovettori**. Se ad es. $\lambda = 1$ lungo una direzione, vuol dire che i punti di quella retta restano invariati, al loro posto: tale retta si dirà **unita**.

GeoGebra non ha incorporati, nell'attuale versione 3.0, comandi che permettano di trattare le matrici, ma se consideriamo la parabola a primo membro di (7)

$$\pi(x)=(a_{11}-x)(a_{22}-x)-a_{12}a_{21}$$

è possibile trovarne gli zeri usando il comando *Radice[ ]*: λ_1 e λ_2 sono le ascisse dei punti così trovati.



Nell'es. in figura abbiamo la seguente situazione:

$$\pi(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda_1=2 \vee \lambda_2=3$$

a tali autovalori corrispondono gli autovettori:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

che individuano le direzioni (rette) invarianti

$$v_1 : y = x \quad \text{e} \quad v_2 : y = 0.$$

Nel grafico notiamo infatti che la punta P' dell'orecchio destro del gatto resta sulla retta $y = x$, ma dista il doppio dall'origine: $\overrightarrow{OP'} = 2\,\overrightarrow{OP}$. Invece il mento Q' giace ancora sull'asse x ma dista il triplo dall'origine: $\overrightarrow{OQ'} = 3\,\overrightarrow{OQ}$.

COME VOLEVASI MIAGOLARE!

Il foglio dinamico descritto in questo articolo è su:
http://chiriano.thebrain.net/materiale/geogebra.asp?id=Reticolato1_Gatto&cat=Trasformazioni

Miao a tutti…

BIBLIOGRAFIA

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Arnold's_cat_map
http://mathworld.wolfram.com/ArnoldsCatMap.html
http://demonstrations.wolfram.com/ArnoldsCatMap/

[2] E. Hairer, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer, 1995 [pag. 59]

[3] W. Maraschini, M. Palma, Multi ForMat (vol. 15), Paravia, 2002

[4] G. Zwirner, L. Scaglianti, Funzioni in R (vol. 2), Cedam, 1998